Planning van gedeelde assets

-de wiskunde erachter-

Door: Edwin v Noort, Karin de Smidt-Destombes en Mirjam Zijderveld, 2022.

In dit artikel staan drie vraagstukken centraal. Het eerste vraagstuk betreft de mate waarin het voor een onderneming economisch rendabel is om een asset te delen. Met een eenvoudig wiskundig model kan worden aangetoond wat de optimale beslissing is om een asset al dan niet te delen.
Het tweede vraagstuk, indien besloten wordt activa te delen, betreft hoe opdrachten ingepland kunnen worden. De volgorde waarin de verschillende opdrachten worden uitgevoerd, hangt af van de gekozen prioriteitsregel. De prioriteitsregels beïnvloeden op hun beurt bepaalde prestatiemetingen.
Ten slotte wordt in als laatste besproken hoe speltheorie kan worden ingezet om een goede match tussen verschillende vragers van capaciteit en leveranciers van capaciteit te bereiken.

Een asset delen: economisch rendabel?

Het onderstaande model geeft een leverancier van capaciteit een handvat om al dan niet over te schakelen op het delen van capaciteit. Allereerst worden de variabelen toegelicht.

Notatie:

c_i^f: vraag naar vaste capaciteit bij fabrikant i (waar al door klanten om verzocht is)

c_i^t: totale capaciteit waarover fabrikant i beschikt

f_i: deel van de totale capaciteit waarover fabrikant i beschikt
Derhalve: $f_i \sum_i c_i^t = c_i^t$

μ_i^d: gemiddelde van de onbekende vraag naar capaciteit waar door klanten van fabrikant i om verzocht wordt

σ_i^d: standaardafwijking van de onbekende vraag naar capaciteit waar door klanten van fabrikant i om verzocht wordt

p_i: winst die fabrikant i maakt wanneer 1 capaciteitseenheid wordt gebruikt om eigen orders uit te voeren

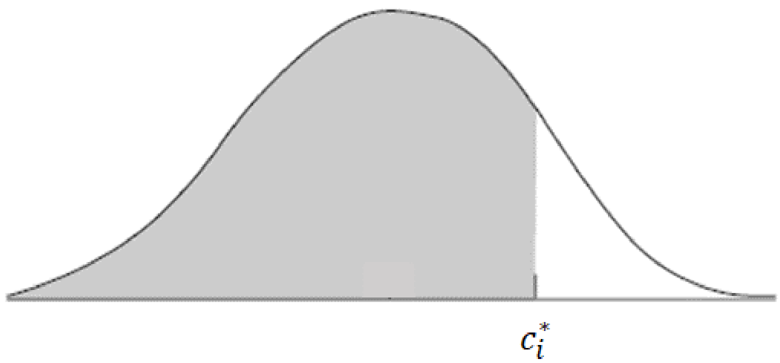
r_i: inkomsten die fabrikant i genereert wanneer 1 capaciteitseenheid aan een andere fabrikant wordt toegewezen

Wij kijken naar 1 periode (planningshorizon). We hebben een machine die door verschillende fabrikanten samen is gekocht. Elke fabrikant i bezit deel f_i van de machine en bezit daarmee hetzelfde deel van de totale capaciteit van de machine, namelijk c_i^t voor fabrikant i.

Indien aan het begin van de periode alle orders bekend zijn, is ook precies bekend hoeveel het capaciteitsoverschot of capaciteitstekort van iedere fabrikant is. Dit houdt in dat elke fabrikant met een capaciteitsoverschot weet hoeveel er aan andere fabrikanten kan worden gegeven en dat zijn enige zorg daarbij het verkrijgen van de beste prijs voor het leveren van zijn capaciteit is. Indien aan het begin van de periode slechts een deel van de orders bekend is, weet de fabrikant dat ten minste c_i^f van zijn capaciteit nodig is (de hoeveelheid om de bekende orders uit te voeren).

Eenvoudigheidshalve gaan we uit van $c_i^f < c_i^t$. Voor de resterende capaciteit is niet bekend hoeveel nodig is om eigen orders uit te voeren en hoeveel aan andere fabrikanten kan worden toegewezen. De maximale hoeveelheid capaciteit die aan andere fabrikanten kan worden toegewezen, wordt gedefinieerd als de resterende capaciteit $(c_i^t - c_i^f)$ minus een stukje capaciteit c_i^*. Dit betekent dat er bij c_i^* een break-even punt ligt voor de gederfde winst en de inkomsten wanneer deze aan andere fabrikanten wordt toegewezen. Vervolgens wordt aangenomen dat de vraag naar capaciteit voor te ontvangen orders volgens een normale verdeling verloopt met een gemiddelde van μ_i^d en een standaardafwijking van σ_i^d. Nu moet de waarde van c_i^* worden bepaald. Daarbij gebruiken we Figuur 1 . De capaciteit aan de rechterkant van c_i^* is de capaciteit die fabrikant i bereid is aan andere fabrikanten toe te wijzen. Om de waarde van c_i^* te vinden berekenen we de gederfde winst LP_i, die gelijk is aan vergelijking (1)

$$
\begin{aligned}
LP_i(c_i^*) &= P(C > c_i^*)(c_i^t - c_i^f - c_i^*)p_i \\
&= (1 - P(C < c_i^*))(c_i^t - c_i^f - c_i^*)p_i
\end{aligned}
\tag{1}
$$



Figuur 1 Schematische weergave van de normale verdeling en de waarde van c_i^* die aangeeft dat de hoeveelheid capaciteit aan de rechterkant van c_i^* aan andere fabrikanten kan worden toegewezen

Hetzelfde wordt gedaan voor de inkomsten die fabrikant i ontvangt wanneer $(c_i^t - c_i^f) - c_i^*$ wat gelijk is aan vergelijking (2)

$$R_i(c_i^*) = P(C < c_i^*)(c_i^t - c_i^f - c_i^*)r_i \tag{2}$$

Nu wordt $LP_i(c_i^*) = R_i(c_i^*)$ bepaald, wat resulteert in:

$$
\begin{aligned}
P(C < c_i^*) &= \frac{p_i}{p_i + r_i} \\
c_i^* &= F^{-1}\left(\frac{p_i}{p_i + r_i}\right)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Wij zien dus dat de optimale c_i^* van drie factoren afhangt: ten eerste de (cumulatieve) verdeling van de vraag (uitgedrukt door F^{-1}), ten tweede p_i en tenslotte r_i. Het valt direct op dat de waarde van $\frac{p_i}{p_i+r_i}$ tussen 0 en 1 ligt, en dat zou zo moeten zijn omdat het om een waarschijnlijkheid gaat.

Duidelijk is dat als de ontvangen inkomsten (r_i) zeer klein zijn in vergelijking met de winst (p_i) de rechterkant van deze vergelijking 1 benadert, wat betekent dat c_i^* groot moet zijn. Dit brengt met zich mee dat $(c_i^t - c_i^f) - c_i^*$ nul benadert. Met andere woorden, er wordt geen capaciteit aan andere fabrikanten toegewezen. Dit is logisch, want waarom zou je capaciteit toewijzen aan andere fabrikanten als het niet veel geld oplevert.

Andersom, wanneer r_i in vergelijking met p_i zeer groot is, dan wordt de rechterkant klein, wat betekent dat c_i^* klein moet zijn, dicht bij nul ligt. De hoeveelheid capaciteit die aan anderen wordt toegewezen, $\left(c_i^t - c_i^f\right) - c_i^*$, nadert dus $\left(c_i^t - c_i^f\right)$, wat de maximale ongebruikte capaciteit is. Dit is ook logisch omdat men blijkbaar te weinig geld verdient met de eigen productie waardoor het rendabeler is de capaciteit aan de andere fabrikanten toe te wijzen. In de praktijk zal dit nauwelijks voorkomen. Dit betekent immers dat de verkoop van de eigen producten zo onrendabel is dat men beter alle capaciteit aan andere fabrikanten kan toewijzen.
In het bijzondere geval dat $p_i = r_i$, constateren we $P(C < c_i^*) = \frac{1}{2}$. Dit betekent dat c_i^* gelijk is aan het gemiddelde. Fabrikant i is bereid de helft van de resterende capaciteit aan anderen toe te wijzen. Dit betekent dat het voor de onderneming niet uitmaakt of zij capaciteit gebruikt voor het draaien van de eigen productie of deze capaciteit toewijst aan andere fabrikanten. Op basis van deze formule is het dus niet verrassend dat wanneer de vraag lager is dan gemiddeld (waarschijnlijkheid gelijk aan 0,5), men zelf produceert en wanneer de vraag hoger is dan gemiddeld (waarschijnlijkheid gelijk aan 0,5), men capaciteit aan anderen toewijst.
De optimale c_i^* hangt echter sterk af van de verdeling van de vraag, in dit geval de normale verdeling. De normale verdeling is een symmetrische verdeling die van 2 parameters afhankelijk is: het gemiddelde en de standaardafwijking. De standaardafwijking geeft de mate van spreiding van de vraag weer.
Hoe hoger de standaardafwijking, hoe meer de vraag varieert. Volgens de formule zal een hogere spreiding van de vraag leiden tot een hogere c_i^* in vergelijking met een lagere spreiding. Dit betekent dat bij een hogere spreiding het voor een bedrijf aantrekkelijker is om capaciteit pas in een later stadium aan anderen toe te wijzen. Een grotere spreiding betekent immers dat een veel grotere vraag dan gemiddeld mogelijk is, waardoor men minder geneigd is capaciteit aan anderen toe te wijzen.
Het andere uiterste is dat er helemaal geen onzekerheid bestaat, de vraag is een gegeven en varieert niet. Het bedrijf zal dan snel overgaan tot het delen van capaciteit. Vanuit financieel oogpunt kan het bedrijf door middel van het delen van capaciteit extra inkomsten genereren, ter waarde van $\left(c_i^t - c_i^f - c_i^*\right)r_i$.
Samengevat is de keuze om een asset al dan niet te delen een samenspel van de spreidingsfunctie van de vraag, de hoogte van de winst per product en de vergoeding per product. Bij een lage spreiding van de vraag is het delen van een asset al snel een aantrekkelijke optie; bij een hoge spreiding ligt dat veel minder voor de hand.

Planning van opdrachten
Vervolgens wordt aangenomen dat een fabrikant nog restcapaciteit heeft en dat andere ondernemingen opdrachten kunnen uitvoeren binnen de restcapaciteit van de desbetreffende onderneming. De vraag daarbij is welke volgorde geschikt is om deze opdrachten uit te voeren. Voor de uitvoering van een opdracht wordt uitgegaan van de volgende 2 elementen: de (geschatte) duur en de gewenste deadline (einddatum). Zogenaamde prioriteitsregels kunnen worden gebruikt om te bepalen in welke volgorde opdrachten afgerond zouden moeten worden. Bekende prioriteitsregels uit de literatuur zijn: first in first out (FIFO), shortest processing time (STP) en earliest due date (EDD). Aan elk van deze prioriteitsregels zijn bepaalde prestatiemetingen verbonden: de gemiddelde doorlooptijd (de tijd totdat de opdrachten zijn afgerond), het gemiddelde aantal opdrachten in een systeem en de vertraging (de tijd waarmee de deadline wordt overschreden).

Om een idee te geven hoe deze prioriteitsregels werken en de prestatiemetingen te illustreren, volgt hier een eenvoudig voorbeeld. Stel, een bedrijf heeft restcapaciteit en er moeten 4 opdrachten van andere bedrijven worden afgehandeld (zie onderstaande tabel).

Opdracht	Duur	Deadline
1	10	16
2	14	20
3	7	15
4	6	17

Tabel 1 Duur en deadlines van 4 opdrachten

Bij FIFO worden de taken afgehandeld in volgorde van binnenkomst. Dit betekent dus eerst opdracht 1, dan opdracht 2, dan opdracht 3 en tenslotte opdracht 4. In SPT wordt eerst opdracht 4 gedaan, dan opdracht 3, dan 1 en tenslotte opdracht 2 (selectie op basis van duur). Bij EDD vindt selectie plaats op basis van de deadline. Dan wordt de volgorde 3, 1, 4 en 2.

Overzicht van de prestatiemetingen volgens de verschillende prioriteitsregels

	Gemiddelde doorlooptijd	Gemiddelde vertraging	Gemiddeld aantal opdrachten
FIFO	25,5	10	2,76
SPT	19,75	6	2,14
EDD	21	6	2,27

Tabel 2 Overzicht van de prestatiemetingen volgens de verschillende prioriteitsregels

Hoe worden deze aantallen bepaald? We laten dit kort zien voor FIFO. Het gemiddelde aantal opdrachten in het systeem is gelijk aan totaal 4 (opdrachten)*10+ 3 (opdrachten)*14+2 (opdrachten)*7+1 (opdracht)*6/ 37 (=doorlooptijd)= 2,76. De gemiddelde doorlooptijd is gelijk aan de totale doorlooptijd/aantal opdrachten= 102/ 4= 25,5. Tenslotte is de gemiddelde vertraging gelijk aan de totale vertraging/aantal opdrachten. De vertraging bij de eerste opdracht is 0, voor de tweede opdracht 4, voor de derde opdracht 16 en voor de laatste opdracht 20. De totale vertraging is dus 40, dit is 10 per opdracht.
Wat valt op aan de waarden van de prestatiemetingen? EDD heeft bijvoorbeeld de laagste gemiddelde vertraging, wat niet verwonderlijk is aangezien dat hetgeen is waarop deze prioriteitsregel selecteert. SPT heeft de laagste gemiddelde doorlooptijd en het laagste gemiddelde aantal opdrachten. Ook dit is logisch omdat een korte SPT de doorlooptijd vermindert. De keuze voor een bepaalde prioriteitsregel heeft dus directe gevolgen voor de waarde van de prestatiemetingen.

Het delen van capaciteit in een netwerk van ondernemingen met behulp van de speltheorie
In de economische wereld kunnen veel situaties als een spel worden gezien. Bedrijven concurreren bijvoorbeeld op dezelfde markt door middel van prijzen of door middel van aanbod. In kranten wordt vaak gesproken over "spelers op de markt".
Personen maar ook bedrijven spelen onderling een spel. Ze proberen te raden wat andere bieders zullen doen en proberen een bod daarop af te stemmen. Politiek is ook een spel: neem zoveel mogelijk standpunten in om kiezers te trekken.
Speltheorie is een economische theorie die een instrument biedt om dit wiskundig te modelleren en te analyseren. In de speltheorie zijn een aantal elementen van belang: wie zijn de spelers, welke acties kunnen zij ondernemen, wat levert het op, wat is de beschikbare informatie en in hoeverre speelt onzekerheid een rol. Verder kan een onderscheid worden gemaakt tussen

coöperatieve en niet-coöperatieve spelen. In niet-coöperatieve spelen speelt elke speler voor zichzelf; in coöperatieve spelen speelt samenwerking een rol.
Hoe kan speltheorie worden toegepast op het delen van capaciteit? We gaan uit van n onafhankelijke bedrijven, elk met een eigen vraag en vaste beschikbare capaciteit. Als ondernemingen besluiten om capaciteit met elkaar te delen, zullen ze moeten beslissen hoe ze die capaciteit aan elkaar toewijzen. De manier waarop ondernemingen met elkaar omgaan bevat zowel elementen van concurrentie als van samenwerking. Deze combinatie van concurrentie en samenwerking wordt in de literatuur ook wel co-concurrentie genoemd.
Hieronder wordt kort inzicht gegeven in de toepassing van speltheorie op het delen van capaciteit. Het voert te ver om daar in dit document uitgebreid op in te gaan. Daarom gebruiken we het zogenaamde Gale-Shapley algoritme.

Het Gale-Shapley algoritme
Dit algoritme wordt normaal gesproken gebruikt om tot een stabiel huwelijk tussen n mannen en n vrouwen te komen. Elk van de mannen en vrouwen heeft een voorkeur voor iemand van het andere geslacht. Een huwelijk is een een-op-een overeenstemming tussen mannen en vrouwen. Het algoritme werkt als volgt.
In de eerste iteratie lopen de mannen naar de vrouwen die ze het leukst vinden. Als de vrouw de man niet leuk vindt, zegt ze "nee" of "misschien".
Bij de tweede iteratie wordt hetzelfde gedaan. De "misschien-mannen" blijven bij hun vrouwen. De overigen ("nee-mannen") gaan naar de vrouw die ze ook echt leuk vinden (tweede-keus). Dan kan de vrouw nu "nee" zeggen tegen de eerste en "misschien" tegen de nieuwe man. Of juist andersom. Of ze kan ze ook allebei wegsturen. Dat maakt niet uit want er volgen nog meer iteraties... tot er n koppels zijn.
Gale en Shapley toonden aan dat dit een stabiel huwelijk is, waarbij de probleemstelling is dat het minst aan de voorkeuren van de mannen wordt voldaan en de vrouwen het gelukkigst zijn.

Het Gale-Shapley algoritme toegepast op het capaciteitsprobleem
In plaats van mannen en vrouwen wordt onderscheid gemaakt tussen de volgende 2 deelgroepen. Ten eerste, de bedrijven die meer capaciteit nodig hebben om aan de vraag van de klant te voldoen (de capaciteit is lager dan de vraag van hun klant). Ten tweede, de ondernemingen met restcapaciteit, de vraag van hun klanten is kleiner dan de capaciteit waarover ze beschikken. Het probleem is nu om tot een evenwichtige overdracht van de niet-toegewezen capaciteiten tussen deze 2 deelgroepen te komen.
Het doel van dit algoritme is de algemene niet-toegewezen capaciteit van het netwerk te verminderen, d.w.z. de klantentevredenheid van de bedrijven te optimaliseren.
Analoog aan de voorkeuren van mannen en vrouwen kunnen de voorkeuren van ondernemingen worden bepaald door zogenaamde nutsfuncties van de ondernemingen. We zullen hier niet ingaan op hoe deze nutsfuncties kunnen worden geconstrueerd.

In het algoritme kunnen de volgende (belangrijkste) stappen worden onderscheiden:
1) We beginnen met de eerste iteratie;
2) De verdeling in twee deelgroepen: 1) de ondernemingen die meer capaciteit nodig hebben en 2) de ondernemingen die capaciteit aan anderen kunnen aanbieden;
3) Elke speler uit deelgroep 1 beoordeelt de andere spelers uit deelgroep 2 (en omgekeerd);
4) Het Gale-Shapley algoritme wordt uitgevoerd;
5) De capaciteit wordt uitgewisseld tussen de ondernemingen van hetzelfde stel;
6) De ondernemingen voor wie in de capaciteitsbehoefte is voldaan of die al hun beschikbare capaciteit hebben aangeboden, worden uit beide deelgroepen gehaald;

7) Wij gaan door met de volgende iteratie (weer beginnend bij stap 2) totdat er geen overschot in de werkbelasting meer is en/of er geen extra capaciteit meer beschikbaar is.

Conclusie

Samenvattend kan worden gezegd dat het voordeel van een coöperatieve speltheorie bij het delen van capaciteit eruit bestaat dat er niet allerlei soorten informatie hoeven te worden gedeeld en dat er dus minder informatie hoeft te worden uitgewisseld. Het is bijvoorbeeld niet nodig om informatie uit te wisselen over de capaciteit, de kosten en de onderlinge afstanden van de ondernemingen. Zoals we hierboven hebben gezien, is het uitgebreid delen van informatie een belangrijke belemmering om capaciteit met elkaar te delen. Alleen op basis van een beperkt aantal kenmerken (de vereiste capaciteit en de aangeboden capaciteit) kan een optimale toewijzing worden samengesteld op basis van het Gale-Shapley algoritme. Dit kan leiden tot een betere samenwerking tussen bedrijven en de wil om capaciteit te delen.

Dit overzicht werd gemaakt door het lectoraat Smart Sustainable Manufacturing van de Haagse Hogeschool, in het kader van het SMITZH project.

DE HAAGSE HOGESCHOOL